

Aljabar 1

Batas pengumpulan : 7 Juni 2023

1. Tentukan apakah pemetaan ϕ berikut adalah isomorfisma, terangkan jawaban saudara!

$$\phi: U(10) \rightarrow \mathbb{Z}_4, \text{ di mana } \phi([3]_{10}) = [2]_4$$

► Asumsikan pemetaan $\phi: U(10) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ dengan $\phi([3]_{10}) = [2]_4$ adalah homomorfisma

$$\text{maka: } \phi([9]_{10}) = \phi([3]_{10} \cdot [3]_{10}) = \phi([3]_{10}) + \phi([3]_{10})$$

$$= 2 + 2$$

$$= 0$$

$$\phi([7]_{10}) = \phi([3]_{10} \cdot [3]_{10} \cdot [3]_{10}) = \phi([3]_{10}) + \phi([3]_{10}) + \phi([3]_{10})$$

$$= 2 + 2 + 2$$

$$= 2$$

Karena $\phi([3]_{10}) = \phi([7]_{10}) = 2$, maka pemetaan $\phi: U(10) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ dengan

$$\phi([3]_{10}) = [2]_4 \text{ tidak BIEKTIF}$$

→ Jadi, karena pemetaan tersebut tidak memenuhi definisi isomorfisma, maka pemetaan tersebut **BUKAN ISOMORFISMA**

2. Misalkan $\phi_1, \phi_3, \phi_5, \phi_7$ adalah automorfisma dari $\mathbb{Z}_8$ sebagaimana dalam Contoh 3.5.2

Tunjukkan bahwa bila $ij \equiv k \pmod 8$, maka $\phi_i \circ \phi_j = \phi_k$!

$$\text{Jawab: } \mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$\mathbb{Z}_8$ adalah grup siklik yang dibangun oleh $\langle 1 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 7 \rangle$, maka apabila sebarang automorfisma haruslah $|\phi([1]_8)| = 8$. Karena nilai $\phi([1]_8)$ ditentukan, maka secara umum: $\phi([n]_8) = n \cdot ([1]_8) \rightarrow \text{Automorfisma}$

Pemetaan:

$$1. \phi_1([n]_8) = [n]_8, \forall [n]_8 \in \mathbb{Z}_8$$

$$2. \phi_3([n]_8) = 3[n]_8, \forall [n]_8 \in \mathbb{Z}_8$$

$$3. \phi_5([n]_8) = 5[n]_8, \forall [n]_8 \in \mathbb{Z}_8$$

$$4. \phi_7([n]_8) = 7[n]_8, \forall [n]_8 \in \mathbb{Z}_8$$

$$\text{Sehingga: } \phi_3 \circ \phi_5([n]_8) = \phi_3(\phi_5([n]_8)) = \phi_3(5[n]_8) = 3(5[n]_8) = 15[n]_8 = 7[n]_8$$

Jadi:

$$\phi_3 \circ \phi_5 = \phi_7 \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_8) \text{ dan secara umum}$$

$$i \cdot j \equiv k \pmod 8, \text{ maka } \phi_i \circ \phi_j = \phi_k \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_8)$$

4. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \langle (1,1) \rangle \cong \mathbb{Z}$.

(Catatan bahwa: $\langle (1,1) \rangle = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$)

$$\text{Jawab: } \phi: (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

akan dibuktikan: $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ homomorfisma

$$\phi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\phi(a,b) \rightarrow a$$

ambil $x, y \in \mathbb{Z}$ di mana $x = a_1, b_1$, $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$
 $y = a_2, b_2$, $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\varphi(x * y) &= \varphi((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) \\ &= \varphi(a_1 * a_2, b_1 * b_2) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ &= \varphi(a_1, b_1) * \varphi(a_2, b_2)\end{aligned}$$

Jadi, terbukti φ Homomorfisme.

► $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ onto dengan $\mathbb{Z}$

ambil $y = a$, di mana $a \in \mathbb{Z}$, sehingga $x \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

maka terdapat

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(a, b) \\ &= a \\ &= y\end{aligned}$$

karena $y \in \mathbb{Z}$, maka φ pada.

► $\text{Ker } \varphi = (1, 1)$

$$\begin{aligned}\text{Ker } \varphi &= \{a, b \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \mid \varphi(x) = e' \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a, b \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \mid \varphi(a, b) = 1\} \\ &= \{a, b \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \mid a = 1\} \\ &= \{a = 1\} \\ &= \{1\}\end{aligned}$$

Karena $a = 1 \in \mathbb{Z}$ maka $\text{ker } \varphi = (1, 1)$.

→ Jadi, karena φ homomorfisma dan pada dengan $\mathbb{Z}$ dan $\text{ker } \varphi = (1, 1)$ maka terbukti:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \langle (1, 1) \rangle \cong \mathbb{Z}$$

3. Dengan notasi sebagaimana diberikan dalam no. 2, tunjukkan bahwa pemetaan $T: \text{Aut}(G) \rightarrow U(\mathbb{R})$ didefinisikan oleh $T(\varphi_i) = i$ adalah suatu isomorfisma!

Jawab: $U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$
 misalkan:

$G = \langle a \rangle$ sehingga, diperoleh apabila $T: \text{Aut}(G) \rightarrow U(n)$

$$|a| = n$$

$$G = \langle a \rangle$$

$$G = \langle 3 \rangle$$

$$|a| = n$$

$$|3| = 8$$

Lalu perhatikan $\varphi \in \text{Aut}(G)$, maka sebarang $g \in G$ didapat

$$g = a^i \text{ dimana } 0 \leq i < n \text{ dan } \varphi(g) = \varphi(a^i) = [\varphi(a)]^i$$

$$0 \leq i \leq 8,$$

$$g = 3^i \rightarrow |\varphi(a)| = |a| = n$$

$$|\varphi(3)| = |3| = 8, \text{ Jadi } \varphi(3) \text{ adalah generator } G$$



$$\phi(a) = a^r \quad r, \text{ di mana } \text{FPB}(n, r) = 1 \quad a^r = a^s \Leftrightarrow s = r \pmod{8}$$

$$\phi(3) = 3^1 \quad \text{Sehingga terdapat suatu } s \in \{q \mid \text{FPB}(n, q) = 1, 0 \leq q < n\} = U(n)$$

$$\phi(a) = a^s \quad \text{dapat ditentukan } \tau(q) = s \quad \forall q \in \text{Aut}(G)$$

$$\phi(3) = 3^1 \quad \phi(3) = 1 \text{ dan } s \in U(8).$$

Berikut dapat ditunjukkan τ homomorfisma jika $\phi \in \text{Aut}(G)$ dengan $\phi(3) = 3^1$ dan $\phi(3) = 3^s$
 $s, t \in U(n)$

$$\phi \circ \phi(a) = \phi(\phi(a)) = \phi(a^s) = a^{st} = a^u$$

di mana $u = st \pmod{8}$, jadi

$$\tau(\phi \circ \phi) = u = st \pmod{8} = ts \pmod{8} = \tau(\phi) \tau(\phi)$$

$$\rightarrow \tau \text{ satu-satu jika } \tau(\phi) = \tau(\phi) \Rightarrow \phi(a) = a^{t(\phi)} = a^{t(q)} = \phi(a)$$

Jadi $\phi = q \quad \tau \rightarrow \text{pada}$

Sebab $s \in U(n)$ sehingga a^s generator g

3^1 generator G sehingga $\phi(a^s) = a^{ts} = (a^s)^t$

$$\phi(3^s) = 3^{ts} = (3^s)^t$$

$$= 3$$

Sehingga jika $\tau : \text{Aut}(G) \rightarrow U(n)$ homomorfisma, pemetaan τ adalah padanan 3 generator G , dapat disimpulkan $\tau : \text{Aut}(G) \rightarrow U(n)$ adalah isomor.

5. Misalkan $H \triangleright G_1$ dan $K \triangleright G_2$, Tunjukkan bahwa

(a) $H \times K$ adalah subgrup $G_1 \times G_2$

(b) $H \times K \triangleright G_1 \times G_2$

Jawab =

a. 1. Definisi subgrup

$$H < G \Leftrightarrow \forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$$

$$a = (h_1, k_1) \quad a, b \in H \times K$$

$$b = (h_2, k_2) \quad h_1, h_2 \in H$$

$$k_1, k_2 \in K$$

$$ab^{-1} \in H$$

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2)^{-1} = (h_1, k_1) \cdot (h_2^{-1}, k_2^{-1}) = (h_1 h_2^{-1}, k_1 k_2^{-1})$$

$$\text{Karena : } \left. \begin{array}{l} h_1 h_2^{-1} \in H \\ k_1 k_2^{-1} \in K \end{array} \right\} (h_1 h_2^{-1}, k_1 k_2^{-1}) \in H \times K$$

$$\text{Sehingga } H \times K < G_1 \times G_2$$

b. $H \times K \triangleright G_1 \times G_2$

$$\text{Definisi : } H \triangleright G \Leftrightarrow g h g^{-1} \in H \quad \forall g \in G$$

$$a = (h_1, k_1) \quad a \in H \times K$$

$$h_1 \in H, k_1 \in K$$

$$b = (g_1, g_2) \quad b \in G \times K$$

$$g_1 \in G_1$$

$$g_2 \in G_2$$

$$b^{-1} \in G \times K$$

$$b^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$$

$$b a b^{-1} = (g_1, g_2) (h_1, k_1) (g_1^{-1}, g_2^{-1})$$

$$= (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 k_1 g_2^{-1})$$

$$= (h_1, k_1)$$

$$= (h_1, k_1) \in H \times K$$

Jadi, $H \times K \triangleright G \times K$